

Построение сетевых моделей

Важнейшими этапами сетевого планирования являются следующие:

1. расчленение комплекса работ на отдельные части и их закрепление за ответственными исполнителями;
2. выявление и описание каждым исполнителем всех событий и работ, необходимых для достижения поставленной цели;
3. построение первичных сетевых графиков и уточнение содержания планируемых работ;
4. сшивание частных сетей и построение сводного сетевого графика выполнения комплекса работ;
5. обоснование или уточнение времени выполнения каждой работы в сетевом графике.

При построении сетевого графика необходимо соблюдать ряд правил.

1. *В сетевой модели не должно быть "тупиковых" событий, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.*
2. *В сетевом графике не должно быть "хвостовых" событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа-событие*
3. *В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, т.е. путей, соединяющих некоторые события с ними же самими.*
4. *Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой стрелкой.*
5. *В сети рекомендуется иметь одно исходное событие и одно завершающее событие.*

Фиктивные работы и события необходимо вводить и в ряде других случаев. Один из них - отражение зависимости событий, не связанных с реальными работами. Другой случай - неполная зависимость работ.

Важным элементом построения сетевой модели является упорядочение сетевого графика. Упорядочение сетевого графика заключается в таком расположении событий и работ, при котором для любой работы предшествующее ей событие расположено левее и имеет меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием. Другими словами в упорядоченном сетевом графике все работы-стрелки направлены слева направо: от событий с меньшими номерами к событиям с большими номерами.

Расчет плановых параметров сетевых графиков

Временные параметры сетевых графиков приведены в следующей таблице.

Элемент сети, характеризующий параметром	Наименование параметра	Условное обозначение параметра
Событие i	Ранний срок свершения события Поздний срок свершения события Резерв времени события	$t_p(i)$ $t_n(i)$ $R(i)$
Работа j	Продолжительность работы Ранний срок начала работы Ранний срок окончания работы Поздний срок начала работы Поздний срок окончания работы Полный резерв времени работы Частный резерв времени работы первого вида Частный резерв времени работы второго вида или свободный резерв времени работы Независимый резерв времени работы	$t(i; j)$ $t_{pn}(i; j)$ $t_{po}(i; j)$ $t_{nn}(i; j)$ $t_{no}(i; j)$ $R_n(i; j)$ $R_1(i; j)$ $R_c(i; j)$ $R_n(i; j)$
Путь L	Продолжительность пути Продолжительность критического пути Резерв времени пути	$t(L)$ $t_{кр}$ $K(L)$

Рассмотрим содержание и расчет указанных в таблице параметров.

Начнем с параметров событий.

Как уже отмечалось, событие не может наступить прежде, чем совершаться все предшествующие работы. Поэтому *ранний (или ожидаемый) срок* $t_p(i)$ *свершения i -го события* определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию:

$$t_p(i) = \max_{L_{ni}} t(L_{ni}),$$

где L_{ni} - любой путь, предшествующий i -му событию, т.е. от исходного до i -го события сети.

Если событие j имеет несколько предшествующих путей, а, следовательно, несколько предшествующих событий i , то ранний срок свершения события j находится по формуле:

$$t_p(i, j) = \max_{i, j} [t_p(i) + t(i, j)].$$

Задержка свершения события i по отношению к своему раннему сроку не отразится на сроке свершения завершающего события (а значит, и на сроке выполнения комплекса работ) до тех пор, пока сумма срока свершения этого события и продолжительности (длины) максимального из последующих за ним путей не превысит длины критического пути.

Поэтому *поздний (или предельный) срок* $t_n(i)$ *свершения i -го события* равен:

$$t_n(i) = t_{кр} - \max_{L_{ci}} t(L_{ci}),$$

где L_{ci} - любой путь, следующий за i -м событием, т.е. путь от i -го до завершающего события сети.

Если событие i имеет несколько последующих путей, а следовательно, несколько последующих событий j , то поздний срок свершения события i можно найти по следующей формуле:

$$t_{п}(i) = \min_{i,j} [t_{п}(j) - t(i,j)]$$

Резерв времени $R(i)$ i -го события определяется как разность между поздним и ранним сроками его свершения

$$R(i) = t_{п}(i) - t_{р}(i)$$

Резерв времени события показывает, на какой допустимый период времени можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения комплекса работ.

Критические события резервов времени не имеют, так как любая задержка в свершении события, лежащего на критическом пути, вызовет такую же задержку в свершении завершающего события.

Из этого следует, что для того, чтобы определить длину и топологию критического пути, вовсе не обязательно перебирать все полные пути сетевого графика и определять их длины. Определив ранний срок наступления завершающего события сети, мы тем самым определяем длину критического пути, а, выявив события с нулевыми резервами времени, определяем его топологию.

Теперь можно перейти к параметрам работ.

Отдельная работа может начаться (и окончиться) в ранние, поздние или другие промежуточные сроки. В дальнейшем при оптимизации графика возможно любое размещение работы в заданном интервале.

Очевидно, что ранний срок $t_{рн}(i, j)$ начала работы (i, j) совпадает с ранним сроком наступления начального события i , т.е.:

$$t_{рн}(i, j) = t_{р}(i)$$

Тогда ранний срок $t_{ро}(i, j)$ окончания работы (i, j) определяется по формуле:

$$t_{ро}(i, j) = t_{р}(i) + t(i, j)$$

Ни одна работа не может окончиться позже позднего допустимого срока своего конечного события i . Поэтому поздний срок $t_{по}(i, j)$ окончания работы

(i, j) определяется соотношением,

$$t_{по}(i, j) = t_{п}(j),$$

а поздний срок $t_{пн}(i, j)$ начала этой работы - соотношением:

$$t_{пн}(i, j) = t_{п}(j) - t(i, j)$$

Таким образом, в рамках сетевой модели моменты начала и окончания работы тесно связаны с соседними событиями ограничениями.

Прежде чем рассматривать резервы времени работ, обратимся к резерву времени пути. Такие резервы имеют все некритические пути. *Резерв времени пути* $R(L)$ определяется как разность между длиной критического и рассматриваемого пути:

$$R(L) = t_{KP} - t(L).$$

Он показывает, на сколько в сумме могут быть увеличены продолжительности всех работ, принадлежащих этому пути. Если затянуть выполнение работ, лежащих на этом пути, на время большее чем $R(L)$, то критический путь переместится на путь L .

Отсюда можно сделать вывод, что любая из работ пути L на его участке, не совпадающем с критическим путем (замкнутым между двумя событиями критического пути), обладает резервом времени.

Среди резервов времени работ выделяют четыре разновидности.

Полный резерв времени $R_{\Pi}(i, j)$ работы (i, j) показывает, на сколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменится. Полный резерв времени определяется по формуле:

$$R_{\Pi}(i, j) = t_{\Pi}(j) - t_P(i) - t(i, j).$$

Полный резерв времени работы равен резерву максимального из путей, проходящего через данную работу. Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы, если ее начальное событие свершится в самый ранний срок, и можно допустить свершение конечного события в его самый поздний срок.

Важным свойством полного резерва времени работы является то, что он принадлежит не только этой работе, но и всем полным путям, проходящим через нее. При использовании полного резерва времени только для одной работы резервы времени остальных работ, лежащих на максимальном пути, проходящем через нее, будут полностью исчерпаны. Резервы времени работ, лежащих на других (немаксимальных по длительности) путях, проходящих через работу, сократятся соответственно на величину использованного резерва.

Остальные резервы времени работы являются частями ее полного резерва.

Частный резерв времени первого вида R_I работы (i, j) есть часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события. Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное события свершаются в свои самые поздние сроки.

Частный резерв времени первого вида находится по формуле:

$$R_1(i, j) = t_{II}(j) - t_{II}(i) - t(i, j)$$

или

$$R_1(i, j) = R_{II}(i, j) - R(i).$$

Частный резерв времени второго вида, или свободный резерв времени R_C работы (i, j) представляет часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события. Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное события свершаются в свои самые ранние сроки. Свободный резерв времени находится по формуле:

$$R_C(i, j) = t_P(j) - t_P(i) - t(i, j)$$

или

$$R_C(i, j) = R_{II}(i, j) - R(j).$$

Свободным резервом времени можно пользоваться для предотвращения случайностей, которые могут возникнуть в ходе выполнения работ. Если планировать выполнение работ по ранним срокам их начала и окончания, то всегда будет возможность при необходимости перейти на поздние сроки начала и окончания работ.

Независимый резерв времени R_H работы (i, j) - часть полного резерва времени, получаемая для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки.

$$R_H(i, j) = t_P(j) - t_{II}(i) - t(i, j)$$

или

$$R_H(i, j) = R_{II}(i, j) - R(i).$$

Использование независимого резерва времени не влияет на величину резервов времени других работ. Независимые резервы стремятся использовать тогда, когда окончание предыдущей работы произошло в поздний допустимый срок, а последующие работы хотят выполнить в ранние сроки. Если величина независимого резерва равна нулю или положительна, то такая возможность есть. Если же величина $R_H(i, j)$ отрицательна, то этой возможности нет, так как предыдущая работа еще не оканчивается, а последующая уже должна начаться. Поэтому отрицательное значение независимого резерва времени не имеет реального смысла. А фактически независимый резерв имеют лишь те работы, которые не лежат на максимальных путях, проходящих через их начальные и конечные события.

Следует отметить, что резервы времени работы (i, j) могут состоять из двух временных отрезков, если интервал продолжительности работы $t(i, j)$ занимает промежуточную позицию между двумя его крайними положениями, изображенными на графиках.

Таким образом, если частный резерв времени первого вида может быть использован на увеличение продолжительности данной и последующих работ без затрат резерва времени предшествующих работ, а свободный резерв времени - на увеличение продолжительности данной и предшествующих работ без нарушения резерва времени последующих работ, то независимый резерв времени может быть использован для увеличения продолжительности только данной работы.

Работы, лежащие на критическом пути, так же как и критические события резервов времени не имеют.

Если на критическом пути лежит начальное событие i , то:

$$R_{\Pi}(i, j) = R_1(i, j).$$

Если на критическом пути лежит конечное событие j , то:

$$R_{\Pi}(i, j) = R_C(i, j).$$

Если на критическом пути лежат начальное и конечное события i и j , но сама работа не принадлежит этому пути, то:

$$R_{\Pi}(i, j) = R_1(i, j) = R_C(i, j) = R_H(i, j).$$

Эти соотношения можно использовать при проверке правильности расчетов резервов времени отдельных работ.

Анализ и оптимизация сетевых планов

После нахождения критического пути и резервов времени работ должен быть проведен всесторонний анализ сетевого графика и приняты меры по его оптимизации. Это весьма важный этап в разработке сетевых графиков раскрывает основную идею СПУ. Он заключается в приведении сетевого графика в соответствие с заданными сроками и возможностями организации, разрабатывающей проект.

В практике стратегического планирования в зависимости от конкретных условий, оптимизация сетевых графиков подразделяется на частную и комплексную. Основными видами частной оптимизации являются:

1. Минимизация времени выполнения комплекса планируемых работ при заданной стоимости проекта.
2. Минимизация стоимости всего комплекса работ при заданном времени выполнения проекта.

Комплексная оптимизация сетевых моделей состоит в нахождении наилучших соотношений показателей затрат экономических ресурсов и сроков выполнения планируемых работ. В условиях рыночной системы в качестве критерия оптимальности сетевых систем планирования могут быть выбраны такие важные экономические показатели, как максимальная прибыль, минимальный расход ресурсов и т.п.

В первую очередь, следует рассмотреть анализ и оптимизацию сетей, в которых заданы только оценки продолжительности работ. В этом случае

главной задачей является минимизация затрат времени на выполнение как отдельных процессов, так и всего комплекса работ.

Анализ сетевого графика начинается с анализа топологии сети, включающего контроль построения сетевого графика, установление целесообразности выбора работ, степени их расчленения.

Затем проводятся классификация и группировка работ по величинам резервов. Следует отметить, что величина полного резерва времени далеко не всегда может достаточно точно характеризовать, насколько напряженным является выполнение той или иной работы не критического пути. Все зависит от того, на какую последовательность работ распространяется вычисленный резерв, какова продолжительность этой последовательности.

Определить степень трудности выполнения в срок каждой группы работ не критического пути можно с помощью коэффициента напряженности работ.

Коэффициентом напряженности K_H работы (i, j) называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим - критический путь:

$$K_H(i, j) = \frac{t(L_{\max}) - t'_{KP}}{t_{KP} - t'_{KP}},$$

где $t(L_{\max})$ - продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i, j) ;

t_{KP} - продолжительность (длина) критического пути;

t'_{KP} - продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем [9, стр.317].

Формулу нахождения коэффициента напряженности легко можно привести к виду:

$$K_H(i, j) = 1 - \frac{R_{\Pi}(i, j)}{t_{KP} - t'_{KP}},$$

где $R_{\Pi}(i, j)$ - полный резерв времени работы (i, j) .

Коэффициент напряженности $K_H(i, j)$ может изменяться в пределах от 0 (для работ, у которых отрезки максимального из путей, не совпадающие с критическим путем, состоят из фиктивных работ нулевой продолжительности) до 1 (для работ критического пути).

Чем ближе к единице коэффициент напряженности, тем сложнее выполнить данную работу в установленные сроки. Чем ближе $K_H(i, j)$ к нулю, тем большим относительным резервом обладает максимальный путь, проходящий через данную работу.

Работы могут обладать полными одинаковыми резервами, но степень напряженности сроков их выполнения, выражаемая коэффициентом

напряженности $K_H(i, j)$, может быть различна. И наоборот, полным различным резервам могут соответствовать одинаковые коэффициенты напряженности. Другими словами, следует учитывать, что больший полный резерв одной работы (по сравнению с другой) не обязательно свидетельствует о меньшей степени напряженности ее выполнения. Это объясняется разным удельным весом полных резервов работ в продолжительности отрезков максимальных путей, не совпадающих с критическим путем.

Вычисленные коэффициенты напряженности позволяют дополнительно классифицировать работы по зонам. В зависимости от величины $K_H(i, j)$ выделяют три зоны:

- критическую - $K_H(i, j) > 0.8$;
- подкритическую - $0.6 \leq K_H(i, j) \leq 0.8$;
- резервную - $K_H(i, j) < 0.6$.

Оптимизация сетевого графика представляет собой процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Оптимизация проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов.

В первую очередь принимаются меры по сокращению продолжительности работ, находящихся на критическом пути.

Это достигается:

- перераспределением всех видов ресурсов, как временных (использование резервов времени не критических путей), так и трудовых, материальных, энергетических (например, перевод части исполнителей, оборудования с не критических путей на работы критического пути); при этом перераспределение ресурсов должно идти, как правило, из зон, менее напряженных, в зоны, объединяющие наиболее напряженные работы;
- сокращением трудоемкости критических работ за счет передачи части работ на другие пути, имеющие резервы времени;
- параллельным выполнением работ критического пути;
- пересмотром топологии сети, изменением состава работ и структуры сети.

В процессе сокращения продолжительности работ критический путь может изменяться, и в дальнейшем процесс оптимизации будет направлен на сокращение продолжительности работ нового критического пути и будет продолжаться до получения удовлетворительного результата. В идеале длина любого из полных путей может стать равной длине критического пути или, по крайней мере, пути критической зоны. Тогда все работы будут вестись с равным напряжением, а срок завершения проекта существенно сократится.

На практике при попытках эффективного улучшения составленного плана неизбежно введение дополнительно к оценкам сроков фактора стоимости работ.

Оптимизация сетевого графика методом "время - стоимость" – является наиболее эффективным методом улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом сроков их выполнения и затраченных ресурсов.

При использовании метода "время - стоимость" предполагают, что уменьшение продолжительности работы пропорционально возрастанию ее стоимости. То есть, если все запланированные работы будут выполняться с рассчитанной в сетевом графике точностью, то общая стоимость разработанного проекта будет минимальна. С ускорением работ затраты возрастают, а с их замедлением – снижаются.

Каждая работа (i, j) характеризуется продолжительностью $t(i, j)$, которая может находиться в пределах:

$$a(i, j) \leq t(i, j) \leq b(i, j) ,$$

где $a(i, j)$ – минимально возможная (экстренная) продолжительность работы (i, j) , которую только можно осуществить в условиях разработки; $b(i, j)$ – нормальная продолжительность выполнения работы (i, j) .

При это стоимость $c(i, j)$ работы (i, j) заключенная в границах от $c_{\min}(i, j)$ (при нормальной продолжительности работы) до $c_{\max}(i, j)$ (при экстренной продолжительности работы).

Используя аппроксимацию по прямой можно легко найти изменение стоимости работы $\Delta c(i, j)$ при сокращении ее продолжительности на величину:

$$\Delta c(i, j) = [b(i, j) - t(i, j)]h(i, j) .$$

Величина $h(i, j)$, равная тангенсу угла α наклона аппроксимирующей прямой показывает затраты на ускорение работы (i, j) (по сравнению с нормальной продолжительностью) на единицу времени:

$$h(i, j) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{c_{\max}(i, j) - c_{\min}(i, j)}{b(i, j) - a(i, j)} .$$

Самый очевидный вариант частной оптимизации сетевого графика с учетом стоимости предполагает использование резервов времени работ. Продолжительность каждой работы, имеющей резерв времени, увеличивают до тех пор, пока не будет исчерпан этот резерв или пока не будет достигнуто верхнее значение продолжительности $b(i, j)$. При этом стоимость выполнения проекта, равная до оптимизации:

$$C = \sum_{i, j} c(i, j) ,$$

уменьшится на величину:

$$C = \sum_{i, j} \Delta c(i, j) = \sum_{i, j} [b(i, j) - t(i, j)]h(i, j) .$$

Для проведения частной оптимизации сетевого графика кроме продолжительности работ $t(i, j)$, необходимо знать их граничные значения $a(i, j)$ и $b(i, j)$, а также показатели затрат на ускорение работ $h(i, j)$, вычисляемые

по вышеуказанной формуле. Продолжительность каждой работы $t(i, j)$ целесообразно увеличить на величину такого резерва, чтобы не изменить ранние (ожидаемые) сроки наступления всех событий, т.е. на величину свободного резерва времени $R_c(i, j)$.

В реальных условиях выполнения проекта может потребоваться ускорение его выполнения, что, естественно, отразится на стоимости проекта: она увеличится. Поэтому необходимо определить оптимальное соотношение между стоимостью проекта C и продолжительностью его выполнения $t = t_{кр}$, представленное, например, в виде функции $C = C(t)$.

Для оптимизации сетей и, в частности, для нахождения функции $C(t)$ могут быть использованы эвристические методы, т.е. методы, учитывающие индивидуальные особенности сетевых графиков.

В практике сетевого планирования при необходимости можно также осуществить комплексный анализ ресурсной, экономической и финансовой реализуемости разработанных планов.

Анализ ресурсной реализуемости выполняется в два этапа. На первом – устанавливается наличие ресурсов по всем работам, а на втором – разрабатываются способы их рационального использования. Экономическая и финансовая реализуемость сетевых моделей тесно связаны между собой. Анализ экономической реализуемости проектных работ необходим для обоснования продолжительности их осуществления, при которой может быть достигнут наибольший финансовый результат.

Таким образом, сетевое планирование, при правильном его использовании, может позволить предприятию наиболее конструктивно строить свою деятельность в условиях рынка. Что, в конечном счете, позволяет предприятию не только функционировать, наиболее эффективно используя имеющиеся ресурсы, но и успешно развиваться.

Постановка задачи. Описание модели

Предприятие планирует выпустить новый вид продукции. Для реализации этого проекта составлен перечень необходимых работ, отраженный в следующей таблице.

Опера ция	Описание работы	Начальное событие	Конечное событие	Наиболее вероятная продолительно сть
A	Обоснование цели проекта	0	1	2
B	Проведение маркетинговых исследований	1	2	5
C	Разработка технических условий	1	3	3
D	Эскизное проектирование	1	4	4
E	Выбор поставщиков ресурсов	2	5	2
F	Фиктивная работа	3	9	0
G	Техническое проектирование	4	6	5
H	Расчет потребности ресурсов	5	8	2

I	Рабочее проектирование	6	7	10
J	Закупка производственных ресурсов	8	9	10
K	Изготовление деталей	7	9	8
L	Сертификация деталей	8	11	2
M	Согласование сроков поставки	7	11	3
N	Разработка технологии сборки	9	10	3
O	Сборка изделия	10	11	11
P	Отправка продукции потребителю	11	12	5

Оптимистическое время завершения проектных работ на единицу меньше заданного, а пессимистическое – на единицу больше.

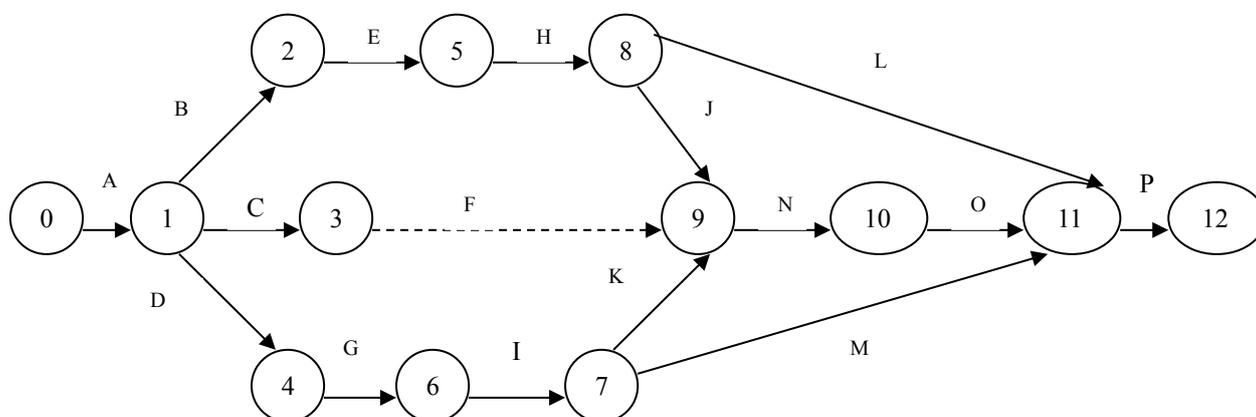
Необходимо:

построить сетевой график.

Найти итоговое решение (критический путь) при помощи системы PERT.

Проанализировать полученные результаты.

Сетевой график выполнения проекта



Анализ полученных результатов

Ожидаемое время завершения проекта – 48 недель.

В результате расчетов мы получили критический путь, проходящий через события 0, 1, 4, 6, 7, 9, 10, 11.

Рассмотрим прежде всего оптимизацию сетевого графика по критерию минимизации затрат времени на выполнение отдельных процессов и всего проекта. Общий срок свершения всех работ в сетевой модели следует сокращать в первую очередь за счет уменьшения критического пути.

Анализируя резервы времени, можно сделать вывод о том, что с целью сокращения критического пути необходимо уменьшать продолжительности работ А, D, G, I, K, N, O, P. То есть, разработчикам проекта или руководителям рассматриваемой фирмы следует обратить внимание и по возможности, с целью уменьшения затрат проекта в целом, уменьшить продолжительность следующих работ:

- обоснование цели проекта;
- эскизное проектирование;
- техническое проектирование;
- рабочее проектирование;
- изготовление деталей;
- разработка технологии сборки;
- сборка изделия;
- отправка продукции потребителю.

Кроме того, следует провести анализ данной модели с целью выравнивания продолжительности наиболее напряженных путей.

В разработанном сетевом графике можно выделить пять полных путей. Их коэффициента напряженности будут соответственно равны:

1. Первый путь проходит через события 0-1-2-5-8-11-12 и равен 18 неделям. Коэффициент напряженности этого пути составляет:

$$K_H = 18/48 = 0,375$$

2. Второй путь проходит через события 0-1-2-5-8-9-10-11-12 и равен 40 неделям. Коэффициент напряженности этого пути составляет:

$$K_H = 40/48 = 0,833$$

3. Третий путь проходит через события 0-1-3-9-10-11-12 и равен 24 неделям. Коэффициент его напряженности составляет:

$$K_H = 24/48 = 0,5$$

4. Четвертый путь – это критический путь, коэффициент напряженности которого равен 1,0.

5. Пятый путь проходит через события 0-1-4-6-7-11-12. Его продолжительность составляет 29 дней, а коэффициент напряженности:

$$K_H = 29/48 = 0,604$$

Анализ коэффициентов напряженности путей подтверждает возможность сокращения критического пути почти в три раза при более рациональной загрузке имеющихся трудовых ресурсов.

Из расчетов следует, что наименее напряженными оказались пути выполнения плановых работ, а наиболее напряженными – проектно-конструкторских. Это значит, что при необходимости сокращения критического пути, следует дополнительно привлечь к работе конструктора.

Если рассматривать оптимизацию данной модели за счет минимизации расходования материальных ресурсов, то одним из возможных способов сокращения критического пути может служить перераспределение различных ресурсов с ненапряженных путей на выполнение критических работ.